数理解析研究所講究録
176巻 1973年 30-58

3体問題における 2体衝突にかんするSundmanの結果

都立大 理　岩野 正宏

Siegelの書物によれば，1858 DirichletはKroneckerに，微分方程式を直接解くのではなく 問題の解をstep by stepに近似するような方法により 力学の問題を解くための一般的な方法を発見した，と語った。また彼は 太陽系の安定性も証明したと語った。彼は何も記録を残さずに間もなく世を去った。Weierstrassは 問題は ベキ級数展開を用いることだと感づき，n体問題の解をみつけようと努力し，弟子のKovalevski, Mittag-Lefflerをgoalめざして指導した。Mittag-Lefflerの提案により，SwedenとNorwayの王様は懸賞問題――n体の座標を 任意の時刻で有効な 級数展開式で表わすこと――を設けた。1889年 Poincaréが受賞した。論文は 力学の将来の発展に重要な多くの独創的なideasを含みまた数学の他の分野に対しても刺戟を与えた。1913年，Sundmanはn=3に対して この問題を解いた。それまでは，初期条件に適当な制限を与えて2体衝突を除外することに成功しな

かったことが，問題解決を困難にした主な理由である。彼の結果に対応するものは $n>3$ の場合には知られていない。

§1. Euler の 10 積分.

P_k $(k=1,2,\ldots,n)$ 質点，(x_k, y_k, z_k) は P_k の座標，m_k は P_k の質量，r_{kl} は 2体 P_k, P_l の間の距離とすれば n 体の運動方程式は

$$m\ddot{q} = U_q \quad , \qquad U=\sum_{k<l}\frac{m_k m_l}{r_{kl}}$$

の形にかける．$3n$ 個の 2階の方程式である．初期条件は

$$r_{kl}(\tau) = \rho_{kl} > 0.$$

よく知られているように，

6個の重心積分

$$\sum m_k x_k = at + a^*, \quad \sum m_k y_k = bt + b^*, \quad \sum m_k z_k = ct + c^*$$

3個の角運動量積分

$$\sum m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k)=\alpha, \quad \sum m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k)=\beta, \quad \sum m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k)=\gamma$$

1個のエネルギー積分

$$T - U = h, \qquad T=\frac{1}{2}\sum(m_k\dot{x}_k^2 + m_k\dot{y}_k^2 + m_k\dot{z}_k^2).$$

1913年 Bruns はこの他には代数的な積分は存在しないことを証明した。

● Sundman-Weierstrass の定理

n体が時刻 t_1 において 一点で衝突するときは, $\alpha=\beta=\gamma=0$ でなければならない。

[証明の方針]
$$I \equiv \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k^2+y_k^2+z_k^2) = \sum_q m q^2$$

これを微分して, $\frac{1}{2}\ddot{I} = T+h = U+2h$. したがって, 衝突の時刻 t_1 の適当な近傍で $\ddot{I}>0$ for $\exists t_2 \leq t < t_1$. したがって I はこの近傍で 正値単調と仮定してよい. よって $t \to t_1$ のとき I は limit をもつ. この limit$=0$ は n体が t_1 において 全部一点 — 重心を原点 O にとっておく — で衝突するときに限る. 少し計算すれば

$$2IT \geq \frac{1}{4}\dot{I}^2+\eta, \quad \eta=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{n}.$$

よって $2IT \geq \eta$. I が単減であれば,

$$2\eta \log I(t_2)/I \leq \dot{I}(t_2)^2+4|h|\,I(t_2)\ , \quad t_2 \leq t < t_1$$

$\eta>0$ のとき, I は正の下界をもつ. また I が単増のとき 正の下界をもつことは明らか. 故に, $\eta>0$ のときは $n(n-1)/2$ 個の r_{kl} の最大値は正の下界をもつ. もちろん $\tau \leq t < t_1$ で $\max r_{kl}$ は正の下界をもつから, n体の O での衝突は起り得ない [終].

◎ とくに $n=3$ のとき, $\alpha=\beta=\gamma=0$ となるのは 3体

が固定された平面上を運動するときに限る.

[証明の方針] $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ および 運動の方程式は座標系の直交変換によって不変であるから $t=\tau$ で 3体は平面 $z=0$ 内にあり, また 重心 P_0 は O にあると仮定してよい. よって $\alpha=\beta=\gamma=0$ とすれば,

$$\sum_{k=1}^{3} m_k y_k \dot{z}_k=0 , \qquad \sum_{k=1}^{3} m_k x_k \dot{z}_k=0 \quad \text{at } t=\tau,$$

$$\sum_{k=1}^{3} m_k \dot{z}_k=0 \qquad (\text{重心は } O \text{ にあるから}).$$

これらは $m_1\dot{z}_1$, $m_2\dot{z}_2$, $m_3\dot{z}_3$ を未知数とする同次方程式となるから,

$\dot{z}_k=0$ at $t=\tau$ であるか または

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{at } t=\tau .$$

はじめの場合は, 3体の $t=\tau$ における運動の方向は平面 $z=0$ 内にあるから, 一意性により 3体は永久に平面 $z=0$ 内を運動する. あとの場合は, (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) を頂点とする 3角形の面積は 0 となるから, 3体は $t=\tau$ において 平面 $z=0$ 内の, ある直線上にある. 座標軸を回転して $\dot{z}_3=0$ $(t=\tau)$ となるようにする. $\dot{z}_k=0$ $(k=$

1, 2, 3) の場合を除けば, $t=\tau$ において $y_1=y_2, x_1=x_2$. すなわち $P_1=P_2$. 同じようにして $P_2=P_3$. よって $t=\tau$ (初期時刻)において 3体は衝突しているとになり, われわれの仮定に反する. [終]

§2 3体運動の方程式

P_1 の座標を (q_1, q_2, q_3), P_2 のを (q_4, q_5, q_6), P_3 のを (q_7, q_8, q_9), 運動量を それぞれ (p_1, p_2, p_3), (p_4, p_5, p_6), (p_7, p_8, p_9) で表わす. すなわち $(p_1, p_2, p_3)=(m_1\dot{q}_1, m_1\dot{q}_2, m_1\dot{q}_3)$ など. 運動の エネルギー は

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{p_k^2}{m_1}+\frac{p_{k+3}^2}{m_2}+\frac{p_{k+6}^2}{m_3}\right).$$

$E=T-U$ とおけば, Hamiltonian form の運動方程式

$$(2.1)\qquad \dot{q}_k=E_{p_k},\qquad \dot{p}_k=-E_{q_k}\qquad (k=1, 2, \cdots, 9)$$

をえる. Euler 積分を用いて 方程式の階数を下げるために, P_3 の座標を (x_7, x_8, x_9), P_1, P_2 の P_3 に関する相対座標を (x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5, x_6) とおけば, x と q との間の関係は

$$x_k\equiv q_k-q_{k+6},\quad x_{k+3}\equiv q_{k+3}-q_{k+6},\quad x_{k+6}\equiv q_{k+6}.$$

$$y_k\equiv p_k,\quad y_{k+3}\equiv p_{k+3},\quad y_{k+6}\equiv p_k+p_{k+3}+p_{k+6}$$

を x の共役座標にとれば $(q, p)\to(x, y)$ は canonical

変換となる. このことは, "$w=w(q,y)$ とするとき,

$$p_k \equiv w_{q_k},\quad x_k\equiv w_{y_k},\quad \det|w_{y_k q_l}|\neq 0$$

であれば, $(q,p)\to(x,y)$ は canonical 変換である" という一般論により, いまの場合は w として

$$w\equiv\sum_1^3\{(q_k-q_{k+6})y_k+(q_{k+3}-q_{k+6})y_{k+3}+q_{k+6}\,y_{k+6}\}$$

をとればよい, ことからわかる. 新しい運動方程式, T, U は

$$\dot x_k = E_{y_k},\quad \dot y_k=-E_{x_k}\qquad (k=1,2,..,9),$$

$$T=\frac12\sum_{k=1}^3\{m_1^{-1}y_k^2+m_2^{-1}y_{k+3}^2+m_3^{-1}(y_{k+6}-y_k-y_{k+3})^2\},$$

$$U=m_1m_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac12}+m_2m_3(x_4^2+x_5^2+x_6^2)^{-\frac12}+m_1m_2\{(x_1-x_4)^2+(x_2-x_5)^2+(x_3-x_6)^2\}^{-\frac12}.$$

さて $E\equiv T-U$ は x_7,x_8,x_9 を含まないから, y_7,y_8,y_9 は consts. (6個の重心積分). $k=1,2,..,6$ に対応する方程式を解けば, $\dot x_k=E_{y_k}$ $(k=7,8,9)$ を積分して x_7,x_8,x_9 をえる. 3体の重心が O にあれば, $y_7=y_8=y_9=0$ かつ $x_{k+6}=-(m_1+m_2+m_3)^{-1}(m_1x_k+m_2x_{k+3})$. $(k=1,2,3)$. よって次の Hamiltonian 系を考えればよい:

$$\dot x_k=E_{y_k},\quad \dot y_k=-E_{x_k}\qquad(k=1,2,..,6),$$

$$T=\frac12(m_1^{-1}+m_3^{-1})\sum_1^3 y_k^2+\frac12(m_2^{-1}+m_3^{-1})\sum_1^3 y_{k+3}^2+m_3^{-1}\sum_1^3 y_k\,y_{k+3}.$$

● $t=t_1$ において 2体 P_1, P_3 が衝突すれば,

$$xy^2\to 2(m_1m_3)^2(m_1+m_3)^{-1},\quad xU\to m_1m_3\qquad \text{as } t\to t_1,$$

ただし $x^2\equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $y^2\equiv y_1^2+y_2^2+y_3^2$, t_1 は有限.

[証明の方針] q_4,q_5,q_6 は 不等式 $|\ddot q|\le m_1 r_{12}^{-2}+m_3 r_{23}^{-2}$

をみたす。P_1とP_3とが衝突するから，$\exists t_2$ に対し

$$r_{13}<\varepsilon/2,\quad r_{12}>\varepsilon/2,\quad r_{23}>\varepsilon/2 \qquad t_2\leqq t<t_1.$$

$\varepsilon>0$ は、p.3 で説明した $\max r_{kl}$ の正の下界。故に $q,\dot q$ は $t\to t_1$ のとき 有限確定値をとる。すなわち P_2の速度成分は $t\to t_1$ のとき有限確定値。$t\to t_1$ のとき $P_1-P_3\to 0$, i.e. $q_k-q_{k+6}\to 0$. 3体の重心は O にあるから，$m_1q_k+m_2q_{k+3}+m_3q_{k+6}=0$ より，$(q_1,q_2,q_3),(q_7,q_8,q_9)$ は $t\to t_1$ のとき 有限確定値，すなわち 2体 P_1,P_3 は空間の確定点で衝突する。ついでに I は $t\to t_1$ のとき 有限確定値をとる。

P_kの 速度を V_k とすれば

$$\frac{1}{2}\sum m_kV_k^2=T=U+h.$$

$t\to t_1$ のとき $x\equiv r_{13}\to 0$. しかるに r_{12},r_{23} は正の下界をもつから，$xU\to m_1m_3$。よって

(*) $$x\sum m_kV_k^2\to 2m_1m_3.$$

とくに $t\to t_1$ のとき $xV_k^2,\ x\dot q_1^2,\dots,x\dot q_9^2,\ \sqrt{x}\,\dot q_1,\dots,\sqrt{x}\,\dot q_9$ は有界。重心はOにあるから，

$$m_1\dot q_k+m_2\dot q_{k+3}+m_3\dot q_{k+6}=0.$$

この関係式より

$$x(m_1\dot q_k)^2-x(m_3\dot q_{k+6})^2=m_2\sqrt{x}\{m_2\sqrt{x}\,\dot q_{k+3}^2+2m_3\dot q_{k+3}(\sqrt{x}\,\dot q_{k+6})\}$$

を得る。故に $t\to t_1$ のとき

$$x(m_1V_1)^2-x(m_3V_3)^2\to 0,\quad xV_2^2\to 0.$$

したがって (*) より $$xV_1^2 \Rightarrow \frac{2m_3^2}{m_1+m_3} \qquad \text{as } t\to t_1.$$

$y^2=m_1^2V_1^2$ であるから 求める関係式が成立つ. [終]

$x(t)^{-1}$ は $t\to t_1$ のとき ∞ になる. しかしながら

$$\int_\tau^{t_1}\frac{dt}{x} = \lim_{t\to t_1}\int_\tau^{t}\frac{dt}{x}$$ は収束である.

[証明の方針] $\frac{1}{2}\ddot{I}=U+2h$ を用いる. $U-m_1m_3x^{-1}$ は $\tau\leqq t<t_1$ において有界. 故に $\frac{1}{2}\ddot{I}-m_1m_3x^{-1}$ は有界. したがって 上記の積分の収束は, $t\to t_1$ のとき $\dot{I}$ が有限な limit をもつことと同等. さて $\ddot{I}>0$ for $\exists t_2\leqq t<t_1$, $\dot{I}$ は $t_2\leqq t<t_1$ において単調. よって $\dot{I}$ は有界であることを示せばよい. Iの定義式より

$$\frac{1}{2}\dot{I}=\sum m q\dot{q} = \sum_1^3 (m_1 q_k\dot{q}_k + m_2 q_{k+3}\dot{q}_{k+3} + m_3 q_{k+6}\dot{q}_{k+6})$$

重心はOにあるから, $m_3\dot{q}_{k+6}=-m_1\dot{q}_k-m_2\dot{q}_{k+3}$ を得る. これを代入して, $x_1,\dots,x_6$ の定義に注意すれば

$$\frac{1}{2}\dot{I}=m_1\{x_1\dot{q}_1+x_2\dot{q}_2+x_3\dot{q}_3\}+m_2\{x_4\dot{q}_4+x_5\dot{q}_5+x_6\dot{q}_6\}.$$

右辺の各項にSchwarzの不等式を応用すれば

$$\frac{1}{2}|\dot{I}|\leqq m_1 xV_1 + m_2 I_{23}V_2, \qquad x=I_{13}$$

すでに示したように $x^2V_1^2\to 0$, 故に $xV_1\to 0$ as $t\to t_1$. また I_{23}, V_2 は $t\to t_1$ のとき 有限確定値をとる. [終]

さて新しい変数 s を次式によって定義すると,

$$s(t) \equiv \int_{\tau}^{t} \frac{dt}{x(t)} \qquad \tau \leqq t < t_1 \ ,$$

は $\tau \leqq t < t_1$ において正則かつ有界である. x_k, y_k を s の関数と考えれば, $x_k(s), y_k(s)$ は $0 \leqq s < s_1$ において正則となる. しかし $t \to t_1$ のとき $x \to 0$ かつ $xy^2 \to 2(m_1 m_3)^2/(m_1+m_3)$ であるから, $y \to \infty$ as $t \to t_1$, したがって $y_1(s), y_2(s), y_3(s)$ のうち少くとも一つは $s = s_1$ において正則でなくなる.

さて s を独立変数にとれば運動方程式

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \qquad (k = 1, \ldots, 6)$$

は,
$$x'_k = x E_{y_k}, \quad y'_k = -x E_{x_k} \qquad (k = 1, \ldots, 6)$$
となる. Hamiltonian form にするために, Poincaré にしたがって, E の代りに

$$F \equiv x(T - U - h) \equiv x(E - h)$$

をとれば, もとの方程式の解は $E = h$ をみたすから,

$$x'_k = F_{y_k}, \quad y'_k = -F_{x_k} \qquad (k = 1, \ldots 6)$$

を満足する. 逆に $F = 0, x \neq 0$ なる後者の解は前者の解となる. しかも xT, xU は $t \to t_1$ のとき有限な limit をもつ. しかし, $F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}$ のうち $t \to t_1$ のとき有界でないものがある. 故に Hamiltonian form ではあるが, $t = t_1$ の近くでの解を調べるには まだ適当ではない.

§3 Sundman の変換.

Sundman は衝突の時刻 t_1 の近傍での解を調べるために, Newtonian form でかかれている方程式に特別な変換を行って, 新しい方程式の右辺は t_1 の近傍で有界であるようにした。一方 Levi-Civita は Sundmanの変換を, Hamiltonian form でかかれている方程式に対して試みた。Levi-Civita の発見した canonical 変換 $(x,y)\to(\xi,\eta)$ は birational な関係式

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &\xi_k = x_k\, y^2 - 2 y_k \sum_{l=1}^{3} x_l y_l ,\quad \eta_k = y_k\, y^{-2} && (k=1,2,3)\\ &\xi_k = x_k ,\qquad \eta_k = y_k && (k=4,5,6) \end{aligned}$$

or

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} &x_k = \xi_k\, \eta^2 - 2 \eta_k \sum_{l=1}^{3} \xi_l \eta_l ,\quad y_k = \eta_k\, \eta^{-2} && (k=1,2,3)\\ &x_k = \xi_k ,\qquad y_k = \eta_k && (k=4,5,6), \end{aligned}$$

$$y^2 \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 ,\qquad \eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$$

で与えられる. Levi-Civita の変換の方がいろんな点ですぐれているように思われる. このように特異性(衝突の時刻の近傍では autonomous 系の右辺が有界でなくなる)を解消する変換は regularizing transformation と呼ばれる. このすぐれた Levi-Civita の変換も Sundman のものと

密接な関係があるように思われるので、あえて Sundman の変換と呼ぶことにしたい。

上記の変換の導き方は極めて heuristic method であるが、これが canonical であることは計算によって直接に確めることができる。じっさい 12次の行列

$$\mathfrak{M} \equiv \begin{pmatrix} (x_{k\xi_l}) & (x_{k\eta_l}) \\ (y_{k\xi_l}) & (y_{k\eta_l}) \end{pmatrix} \in Sp(6),$$

すなわち $\mathfrak{M}$ は 12次の symplectic 群の要素となるから。

Siegel の書物にしたがって導き方の概略を説明しよう。

衝突 $P_1 \to P_3$ のときは、P_2 の影響は無視できる。そこで重心は O にあるとして P_1, P_3 を2体問題として考える:

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1^{-1}+m_3^{-1})(y_1^2+y_2^2+y_3^2),\quad U = m_1 m_3 (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}} = m_1 m_3\, x^{-1}$$

(see p.6)

$$F = \tfrac{1}{2}(m_1^{-1}+m_3^{-1})\, x y^2 - m_1 m_3 - h x$$

となる。$h=0$, $\frac{1}{2}(m_1^{-1}+m_3^{-1})=1$ なる特別な場合を考え、また付加定数 $-m_1 m_3$ を無視して、

$$(3.3)\qquad x_k' = F_{y_k},\qquad y_k' = -F_{x_k}\qquad (k=1,2,3)$$

$$F \equiv F(x_k, y_k) \equiv (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$

を考える。$v \equiv v(x,\xi)$, $\det|v_{x_k\xi_l}| \neq 0$ に対して

$y_k = v_{x_k}$, $\eta_k = -v_{\xi_k}$ $(k=1,2,3)$ によって定められる変換 $(x, y) \to (\xi, \eta)$ は canonical であり，新しい F は $F(x_k, v_{x_k})$ で与えられる．このとき v を適当にとって，$F(x_k, v_{x_k})$ を ξ のみの関数 $\lambda(\xi_k)$ となるようにできないか？ そうすれば，新しい方程式は $\xi_k' = \lambda_{\eta_k} = 0$, $\eta_k' = -\lambda_{\xi_k}$ となり，積分として $\xi_k = const$, $\eta_k + \lambda_{\xi_k} s = \zeta_k = const$ が得られる．v は，次の偏微分方程式を満足しなければならない：

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}} (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2) = \lambda(\xi_k),$$

$$\det |v_{x_k \xi_l}| \neq 0 .$$

これを解くために，平面における同じような問題をまず考え，それを 3 次元の場合に拡張することを試みる．平面の場合は，
$$(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2) = \lambda(\xi_k), \quad \det |v_{x_k \xi_l}| \neq 0 .$$

$z \equiv x_1 + \sqrt{-1}\, x_2$ とおき，v を解析関数 $\phi(z) \equiv u + \sqrt{-1}\, v$ の虚部として求めてみる．Cauchy-Riemann より

$$u_{x_1} = v_{x_2}, \quad v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 = u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = |\phi_z|^2$$

故に

$$|z \phi_z^2| = \lambda(\xi_k)$$

は const. でなければならない．$z\phi_z^2$ は解析関数であるから，$z\phi_z^2 \equiv const$ でなければならない．

$$z\phi_z^2 = \bar{\zeta} = \xi_1 - \sqrt{-1}\, \xi_2, \quad \phi_z = (\bar{\zeta}/z)^{\frac{1}{2}}$$

$\zeta = \xi_1 + \sqrt{-1}\, \xi_2$ は complex const.

とおけば，　積分して　$\phi(z)=2\sqrt{\xi z}$．よって

$$\sqrt{-1}\,v=\sqrt{\xi z}-\sqrt{\bar{\xi}\bar{z}}$$

（ϕ は z,ξ の関数とみて，$2\sqrt{-1}\,v=\phi(z,\xi)-\phi(\bar{z},\bar{\xi})$），故に

$$v^2=2|\xi z|-\xi z-\bar{\xi}\bar{z}$$
$$=2\left\{(\xi_1^2+\xi_2^2)^{\frac{1}{2}}(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}-(\xi_1x_1+\xi_2x_2)\right\}$$

をえる．計算によって　$\xi z\neq 0$ ならば

$$\det|v_{x_k\xi_l}|=\frac{1}{4|\xi z|}\neq 0.$$

これで $v(x,\xi)$ は問題の偏微分方程式の解になることがわかった．

これを3次元に拡張するために

$$v^2=2\left(\xi x-\sum_{l=1}^{3}\xi_l x_l\right),\quad \xi=(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^{\frac{1}{2}},\ x=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

とおいてみる．$F(x_k,y_k)=xy^2=x(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$ であるから，上記の v を $F(x_k,v_{x_k})$ に代入したとき，ξ だけの関数 $\lambda(\xi_k)$ になることがわかれば，この v は問題の偏微分方程式の解になる．定義により，微分して

(3.4) $v v_{x_k}=x_k x^{-1}\xi-\xi_k\ (x\neq 0)$，$v v_{\xi_k}=\xi_k\xi^{-1}x-x_k\ (\xi\neq 0)$.

はじめの式に x をかけ，2乗して k に関して加えれば，　$x^2v^2\sum_1^3 v_{x_k}^2=2\xi^2x^2-2\xi x\sum_1^3\xi_l x_l=\xi x v^2.$

故に

$$(3.5)\qquad x\sum_{1}^{3} v_{x_k}^2 = \xi, \qquad (xv^2 \neq 0).$$

Jacobian は $\quad \det|v_{x_k\xi_l}| = \dfrac{-1}{4\xi x v} \quad (\xi x v \neq 0).$

(註. Jacobian $\neq 0$ であることは簡単にでるが，上記の値になることは証明できなかった). よって

$$\lambda(\xi_k) = \xi$$

ととればよい. $\xi x v \neq 0$ であるためには，2つの実ベクトル (ξ_1, ξ_2, ξ_3) と (x_1, x_2, x_3) は 1次独立でなければならない. 母関数 $v(x_k, \xi_k)$ によって生成される canonical 変換を求めよう. まず (3.4) のはじめの式に x, あとの式に ξ をかければ,

$$x v v_{x_k} = x_k \xi - \xi_k x = -\xi v v_{\xi_k}$$

$y_k = v_{x_k}$, $\eta_k = -v_{\xi_k}$ より, $\qquad x y_k = \xi \eta_k \quad (k=1,2,3).$

また (3.5) より, $\qquad x y^2 = \xi.$

(3.4) のあとに式に ξ をかけ 2乗して k に関して加えて, $\qquad \xi\sum_{1}^{3} v_{\xi_k}^2 = x \quad$ or $\quad \xi\eta^2 = x.$

故に $xy_k = \xi\eta_k$, $xy^2 = \xi$ より, $\qquad \eta_k = y_k y^{-2} \quad (k=1,2,3).$

また $xy_k = \xi\eta_k$, $\xi\eta^2 = x$ より, $\qquad y_k = \eta_k \eta^{-2} \quad (k=1,2,3).$

x_k の式を求めるために, (3.4) と $v_{x_k} = y_k$ とから,

$$v y_k = x_k x^{-1}\xi - \xi_k,$$

これに x_k をかけて, k に関して加えれば

$$v\sum_{k=1}^{3} x_k y_k = x\xi - \sum_{k=1}^{3} x_k \xi_k = \frac{v^2}{2} \quad \text{or} \quad \sum_{k=1}^{3} x_k y_k = \frac{v}{2}.$$

同じようにして，(3.4)のあとの式に $v_{\xi_k} = \eta_k$ を代入して

$$v\eta_k = x_k - \xi_k \xi^{-1} x$$

をえるから，

$$v\sum \xi_k \eta_k = \sum x_k \xi_k - \xi x = -\frac{v^2}{2} \quad \text{or} \quad \sum_{1}^{3} \xi_k \eta_k = -\frac{v}{2}.$$

$v y_k = x_k x^{-1}\xi - \xi_k$ より，

$$\xi_k = x_k x^{-1}\xi - v y_k = x_k x^{-1}\xi - 2y_k \sum_{l=1}^{3} x_l y_l.$$

$xy^2 = \xi$ であったから，(3.1) のはじめの式

$$\xi_k = x_k y^2 - 2y_k \sum_{1}^{3} x_l y_l \qquad (k=1,2,3)$$

をえる。　また　$v\eta_k = x_k - \xi_k \xi^{-1} x$ より，

$$x_k = \xi_k \xi^{-1} x - 2\eta_k \sum_{1}^{3} \xi_l \eta_l.$$

$\xi\eta^2 = x$ であったから，(3.2) のはじめの式

$$x_k = \xi_k \eta^2 - 2\eta_k \sum_{1}^{3} \xi_l \eta_l$$

をえる.

上記の discussion では，2つのベクトル (x_1, x_2, x_3), (ξ_1, ξ_2, ξ_3) は real かつ1次独立であるということが仮定されている. (3.1) の逆変換が (3.2) であるためには，$\eta \neq 0$, $y \neq 0$ であればよい.

方程式 (3.3) は　$\xi_k' = 0$, $\eta_k' = -\xi_k \xi^{-1}$ $(k=1,2,3)$ となり，

これの解を(3.2)の(x_1, x_2, x_3)に代入すれば，一般に放物線をえる.

Sundmanの変換は s に independent であるから，Hamiltonian function F は，新しい変数を用いれば

$$F \equiv xT - xU - xh,$$

$$xT = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_3}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)\xi\eta^2\sum_{k=1}^{3}\eta_{k+3}^2 + \frac{1}{m_3}\xi\sum_{k=1}^{3}\eta_k\eta_{k+3}$$

$$xU = m_1 m_3 + m_2\xi\eta^2\left(\frac{m_3}{r_{23}}+\frac{m_1}{r_{12}}\right), \quad x = \xi\eta^2$$

$$r_{23}^2 = \sum_{k=1}^{3}\xi_{k+3}^2, \qquad r_{12}^2 = \sum_{k=1}^{3}\left(\xi_k\eta^2 - 2\eta_k\sum_{l=1}^{3}\xi_l\eta_l - \xi_{k+3}\right)^2$$

と書け，方程式は

(3.6) $\quad \xi_k' = F_{\eta_k}, \quad \eta_k' = -F_{\xi_k} \qquad (k=1,\dots,6).$

● (ξ_k, η_k), $k=1,\dots,6$, は，$s=s_1$(衝突の time)において正則である, or 収束半径が0でない $s-s_1$のベキ級数で表わせる.

[証明の方針] $s\to s_1$ $(t\to t_1)$のとき，ξ_k, η_k $(k=4,5,6)$ は definite limits に近づく. また r_{12}, r_{23} は正の極限に，$\xi = xy^2$ は $2(m_1m_3)^2/(m_1+m_3) \equiv c > 0$ に近づく. したがって $y\to\infty$ かつ $\eta_k = y_k/y^2 \to 0$ $(k=1,2,3)$.

故に $\quad c/2 \leqq \xi \leqq 2c \quad$ for $\exists\, s_0 \leqq s < s_1$.

また $\xi_4, \xi_5, \xi_6, \eta_1, \dots, \eta_6$ は $s\to s_1$ のとき limits をもつ.

よって $(\xi_4, \dots, \eta_6)$ を9次元空間の点とみれば，これは

或るコンパクト球 K に含まれる. $\mathfrak{S} \equiv \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3);\ c/2 \le \xi \le 2c\}$ とおく. ξ, X_{12}^{-1}, X_{23}^{-1} を 12個の変数 (ξ_k, η_k) の関数とみるとき, K が十分小ならば, これらは $P = \mathfrak{S} \times K$ で正則, したがって F は $\mathfrak{S} \times K$ で正則となる. s_0 を s_1 の十分近くにとれば, 解曲線 $(\xi_k(s), \eta_k(s))$ $s_0 \le s < s_1$ は P に完全に含まれる. 故に $(\xi_k(s), \eta_k(s))$ は $s = s_1$ において正則. とくに ξ_1, ξ_2, ξ_3 は $s \to s_1$ のとき limits をもつ. [終]

④ $x_k(t), y_k(t)$, $k = 1, \ldots, 6$ は $t = t_1$ を越えて解析接続できる.

[証明の方針] $\xi_{k1} \equiv \xi_k(s_1)$, $k = 1, 2, 3$, $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\right)$ とおく. $\eta_k' = -F_{\xi_k}$ より

$$\eta_k' = -\frac{b}{c}\xi_{k1} + O(s - s_1).$$

これを積分して

$$\eta_k = -\frac{b}{c}\xi_{k1}(s - s_1) + \cdots,$$

$$\eta^2 = b^2 (s - s_1)^2 + \cdots.$$

一方 $x_k = \xi_k \eta^2 - 2\eta_k \sum_{l=1}^{3} \xi_l \eta_l$ であるから,

$$x_k = \xi_{k1} b^2 (s - s_1)^2 - 2\xi_{k1} b^2 (s - s_1)^2 + \cdots.$$

よって

(3.7) $x_k(t) = -b^2 \xi_{k1} (s - s_1)^2 + \cdots$, $(k = 1, 2, 3)$

$$x(t) = b^2 c (s - s_1)^2 + \cdots.$$

$t' = x$ より, これを積分すれば

$$t - t_1 = \frac{1}{3} b^2 c (s - s_1)^3 + \cdots$$ cf

(3.8) $$s-s_1=\{3b^{-2}c^{-1}(t-t_1)\}^{\frac{1}{3}}+\cdots\cdots$$

右辺のべキ級数は $t<t_1$ のときも real。解 $(x_k(t), y_k(t))$ は，$\tau\leqq t<t_1$ にそって解析接続すれば，$t=t_1$ を2位の分岐点にもつ。$x_k(t)$ は局所座標 $s-s_1$ に関して正則，$y_k(t)$ は $y_k=\eta_k\,\tau^{-2}$ より $s-s_1$ に関して1位の極（高々）

$$y_k(t)=-b^{-1}c^{-1}\xi_{k1}\ (s-s_1)^{-1}+\cdots\cdots \qquad (k=1,2,3)$$

をもつ．よって $x_k(t)$, $y_k(t)$ は特異点 $t=t_1$ を越えて解析接続できる（real s-軸に沿って s_1 を越えて接続すればよい．このとき t は real かつ t_1 を越えて増加する）[終]

(3.7), (3.8) から， $$x_k(t)=-b^2\xi_{k1}(3b^{-2}c^{-1})^2(t-t_1)^{\frac{2}{3}}+\cdots\cdots.$$

故に $t=t_1$ で2体 P_1, P_3 は衝突する。それから互に反射する $t>t_1$ が t_1 に十分近ければ $x>0$ かつ y は有限．(3.2) によって $(\xi,\eta)\to(x,y)$ にうつるとき，$t>t_1$ のときも解であることは，Euler の10個の積分は，t の解析関数であるから，この解析接続において不変であることからわかる。故に

$$\underset{(k=1,\cdots,6)}{\xi_k'=F_{\eta_k},\ \eta_k'=-F_{\xi_k}}\ \Rightarrow\ \underset{(k=1,\cdots,6)}{x_k'=F_{y_k},\ y_k'=-F_{x_k}}\ \Rightarrow\ \underset{(k=1,\cdots,9)}{\dot{x}_k=E_{y_k},\ \dot{y}_k=-E_{x_k}}\ \Rightarrow\ \underset{(k=1,\cdots,9)}{\dot{q}_k=E_{p_k},\ \dot{p}_k=-E_{q_k}}$$

$t_1<t$ なる t をえらび，$\dot{q}_k=E_{p_k}$, $\dot{p}_k=-E_{q_k}$ の解は t まで接続されたものとする。この t を改めて τ とかき，解を $t>\tau$

の方向へ解析接続するとき有限な時刻 $t=t_2$ において特異点に出会うならば，ふたたび 2体は衝突しなければならない。(角運動量定数は すべては 0でないと仮定している！)このとき衝突は P_1とP_3との間で起るかどうかは わからない、同じような Sundman 変換を行えば 解は t_2 を越えて接続できる．この方法で 特異点の列 $\{t_n\}$ を得る．

● $\{t_n\}$ は 有限な点 t_∞ には集積しない．

[証明の方針]　U は各 t_n において無限大となる．かつ $t\to t_\infty$ のとき $U\to\infty$。もし $U\leqq A<\infty$ ならば Cauchy の存在定理により 解は $t=t_\infty$ において正則，故に nが十分大であれば t_n は解の正則点となり，これは矛盾である．

よって $t\to t_\infty$ のとき，$\min\{r_{12}, r_{23}, r_{31}\}\to 0$.

$\frac{1}{2}\ddot{I}=U+2h$ より，

$$\ddot{I}>0 \quad \exists t_0\leqq t<t_\infty, \quad \ddot{I}=\infty \quad at\ {}^\forall t_n$$

p.7で説明したように $\dot{I}$ は各 t_n の左側で連続かつ増加，有限な limit をもつ．同じことが t_n の右側でもいえるから，$\dot{I}$ は $t_0\leqq t<t_\infty$ で 連続，増加，有界な関数である．

よって I は $t_0\leqq t<t_\infty$ で正の下界をもつ。辺のどれか一つ，r_{13} は 0に近づき，残りの二つは 或る正の数より大きい。t_0 を適当にとれば，$t_0\leqq t<t_\infty$ における衝突は P_1 と P_3

なる特定の2体間でのみ起ることになる．したがって Sundman の変換をただ一回だけ行なうことにより この已円内の無限回の衝突における解の行動がわかる．よって

$$\lim_{t\to t_\infty} \xi = \lim xy^2 = \frac{2(m_1 m_3)^2}{m_1+m_3} > 0.$$

特異点 t_n に対応して $s_n = \int_{t_0}^{t_n} \frac{dt}{x(t)}$，かつ $s_\infty = \int_{t_0}^{t_\infty} \frac{dt}{x(t)}$ は収束する．よって $\{s_n\}$ は有限な s_∞ に収束する。ところが $x(s)$ は各 s_n，および s_∞ において正則かつ s_n は $x(s)$ の zeros である．故に $x(s)\equiv 0$．矛盾 [終]

$t\geq \tau$ および $t\leq \tau$ に対して解析接続できる．

§4 Sundman の定理

Sundman は一つの新しい変数 ω を導入して，時間 t および9つの座標 $q_1,\dots,q_9$ を単位円の内部 $|\omega|<1$ で ω の正則な関数によって表現した．このとき real t 軸には $-1<\omega<1$ を対応させる。

証明の方針はつぎの通り．Sundman の変換において，独立変数 s は衝突する2体間の距離 x に depend する．したがって二つの質点は変換のたびにつねに区別されているから 独立変数の変換は，3体に関して対称性をもたない．ところが，2体 P_1, P_3 が時刻 t_1 において衝突すると仮定すれば，$t\to t_1$

(特異点)のとき，$U \approx m_1 m_3 x^{-1}$ となるから，x^{-1}の代りに U をとって

$$s = \int_{\tau}^{t} U\,dt$$

を独立変数にとれば，どの2体が衝突してもこの s はまえの s と同じ役目をするであろう．$t \to \pm\infty$ のとき $s \to \pm\infty$ となるように

$$s \equiv \int_{\tau}^{t} (U+1)\,dt$$

を，Sundman 変換における独立変数にとる．real s-line 上の任意の点 s_0 に対し，s_0 を中心とする或る円板 K_0 が対応して，時間 t および 9つの座標 $q_1, \ldots, q_9$ は K_0 で一様収束する $s-s_0$ のべき級数で表現される。

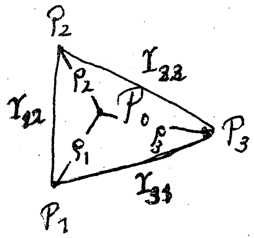
$$G_0 \equiv \bigcup_{s_0} K_0$$

は単連結領域かつ real s-line を含む．Riemann の写像定理によってこれを ω-平面内の単位円板の内部に写像する．ただし real s-line は $-1<\omega<1$ に写像する．これで ω の存在はわかる。しかし ω を構成するためには，K_0 の半径 ρ_0 は，$-\infty < s_0 < \infty$ において，正の下限をもつことを証明する必要がある。Sundman は次の二つの lemmas を証明した。

● Sundman's first lemma　三つの角運動量 consts のすべては 0 でないとすれば，3体によってつくられる3角形の周

長は，任意の時刻において，ある正の数より大きい。すなわち 周長の，$-\infty < t < +\infty$ における，下限は正.

[証明の方針] むづかしい計算をしなければならない。P_0を重心，



$\sigma \equiv r_{12} + r_{23} + r_{31}$ とおく.

$\rho_j + \rho_k \leq r_{jl} + r_{lk}$, $r_{jk} \leq \rho_j + \rho_l$

$$\therefore \quad \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \leq \sigma \leq 2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)$$

一方

$$I \equiv \sum_1^3 m_k \rho_k^2 \leq \mu \sum_1^3 \rho_k^2 \leq \mu \sigma^2, \quad \mu = \max_1^3 m_k.$$

また

$$\frac{\sigma^2}{4} \leq (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)^2 = \left(\sum_1^3 \sqrt{m_k}\,\rho_k \cdot \sqrt{m_k}^{-1} \right)^2 \leq I \cdot \sum_1^3 m_k^{-1}.$$

よって I は上と下から押えられる. ところで σ の，$-\infty < t < \infty$ における下限が正であることを示すには，

$$I \geq \exists c > 0, \quad -\infty < t < \infty$$

を証明すればよい。h (エネルギー定数) ≥ 0 のときは I は convex となるから，c の存在の証明は比較的にやさしいが，$h < 0$ のときは I は convex でないから，その証明は terribly hard (6頁). [終]

● Sundman's second lemma. 三つの角運動量 consts のすべては 0 でなければ，3角形の最短 side の反対側にある質点 (衝突しない質点) の速度は，任意の時刻において，ある

正の数より小さい，速度の，$-\infty<t<\infty$ における上限は有限.

● Sundman's 定理.

$I(\tau)<A,\ U(\tau)<A,\ |h|<A,\ \eta^{-1}<A,\qquad \eta\equiv\frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

ならば，質量 m_1, m_2, m_3 と A のみに関係して定まる $\exists\,\delta>0$ が存在して，時間 t と3体の 9つの座標 $q_1, \dots, q_9$ とは $-\delta<\nu<\delta$ で正則な $s=\sigma+\sqrt{-1}\,\nu$ の解析関数によって表現される．とくに

$$\sigma = \mathrm{real}\,s = \int_\tau^t (U+1)\,dt .$$

Band $-\delta<\mathrm{Im}\,s<\delta$ を，(実軸は実軸の部分に対応するように) 単位円 $|\omega|<1$ に写像する関数 ω は

$$\omega = \left(e^{\frac{\pi s}{2\delta}}-1\right)\Big/\left(e^{\frac{\pi s}{2\delta}}+1\right)$$

で与えられる.

衝突は，$-1<\omega<1$ における $\dfrac{dt}{d\omega}$ の零点を計算すればよい。任意の二つの衝突は或る正の時間間隔をおいて起る，(すなわち $t_n-t_{n-1}\geq K>0$，K は A と質量とのみから定まる量).

[証明の方針] 独立変数を t から $s=\int_\tau^t (U+1)\,dt$ にかえる．3体の質量と定数 A のみによって定まる $\exists\,B\geq$

$A+1$ があって，任意に s_1 を固定するとき，

$$U \leqq B \quad at \quad s=s_1 \qquad\qquad U>B \quad at \quad s=s_1$$

であるかによって 証明を別々におこなう。あとの場合は s_1 で2体が衝突する場合を cover する。

$U \leqq B$ at $s=s_1$. s を独立変数にとれば，(2.1) より

$$\begin{cases} q_k' = F_{p_k}, \quad p_k' = -F_{q_k} & (k=1,\cdots,9) \\ t' = \dfrac{1}{U+1} & \left(' = \dfrac{d}{ds} \right) \end{cases}$$

$$F = \frac{E-h}{U+1} = \frac{T-U-h}{U+1} = \frac{T-h+1}{U+1} - 1$$

証明の要点は，3体の質量と A のみに関係して定まる量 $^\exists b>0$ があって， F, $(U+1)^{-1}$ は複素領域

$$|q_k - q_k(s_1)| < b, \quad |p_k - p_k(s_1)| < b$$

において 正則 しかも 不等式 $|T| < b_1$, $|U+1| < 4$ が成り立つ ことを示すことである。ここで $q_k(s_1)$, $p_k(s_1)$ は任意の real な初期値，b_1 は 3体の質量と A のみに関係する量。このことがわかれば Cauchy の存在定理から，$q_k(s)$, $p_k(s)$, $t(s)$ および 相互距離 $r_{k\lambda}(s)$ は 複素領域 $|s-s_1| < {}^\exists b_5$ で 正則になる。b_5 も質量と A のみに関係し，初期値 および s_1 の値には無関係な量。

$U > B$ at $s = s_1$. Sundman の変換をおこなって得られた方程式(3.6) を考える.

$$\xi_k' = F_{\eta_k}, \quad \eta_k' = -F_{\xi_k} \qquad (k=1,2,\ldots,6)$$

$$t' = \frac{1}{U+1} \qquad\qquad \left(' = \frac{d}{ds}\right),$$

$$F = \frac{xT + (1-h)x}{xU + x} - 1, \quad \frac{1}{U+1} = \frac{x}{xU+x}$$

ここで $x = r_{13} = \xi\eta^2$. x, xT, $(xU+x)^{-1}$ を ξ_k, η_k (12 個) の関数と考える. 証明の要点は, xT, x, $(xU+x)^{-1}$ は複素領域

$$|\xi_k - \xi_k(s_1)| < C_{49}^{-1}, \quad |\eta_k - \eta_k(s_1)| < C_{49}^{-1} \quad (k=1,\ldots,6)$$

で正則かつ不等式

$$|xT| < C_{46}, \quad |x| < C_{47}, \quad \frac{1}{2m_1m_3} < |xU+x|^{-1} < \frac{2}{m_1m_3}, \quad |F| < C_{51}$$

が満足されることを示すことである. C_{49}, C_{47}, C_{51} は3体の質量と A のみに関係して定まる正量, $\xi_k(s_1)$, $\eta_k(s_1)$ は任意の real 初期値. このことがわかれば方程式の解 $(\xi_k(s), \eta_k(s), t(s))$ は $|s-s_1| < C_{52}^{-1}$ で正則となる. C_{52} は質量と A のみに関係する正量. したがって $q_k(s)$, $t(s)$, $x_{k\lambda}(s)$ は複素領域 $|s-s_1| < C_{52}^{-1}$ において正則となる. よって定理の δ は $\delta = \min(b, C_{52}^{-1})$ で与え

られる.

写像関数 ω の存在はほとんど明かであろう. つぎに K の存在を示す。 $s=s_1$ で衝突が起れば

$$\eta_k=0\ (k=1,2,3),\quad (\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^{\frac{1}{2}}=c\equiv\frac{2(m_1m_3)^2}{m_1+m_3}>0. \qquad \text{at } s=s_1$$
$$x=\xi\eta^2=0,\qquad xU=m_1m_3$$

$F_{\xi_k}=c^{-1}\xi^{-1}\xi_k$ at $s=s_1$ となる. 座標軸を回転して $\xi=\xi_1$ at $s=s_1$ と仮定できる. さて Cauchy 積分公式により

$$|F_{\xi_1}-F_{\xi_1}(s_1)|<\frac{1}{2c}\qquad \text{in}\ |\xi_k-\xi_k(s_1)|<c_{55}^{-1},\ |\eta_k-\eta_k(s_1)|<c_{55}^{-1}$$

c_{55} は質量と A のみから定まる量で c_{49} より大きい. $F_{\xi_1}=c^{-1}$ at $s=s_1$ であるから,

$$F_{\xi_1}>\frac{1}{2c}\qquad \text{for}\ |s-s_1|\leq c_{56}^{-1}<c_{52}^{-1}.$$

c_{56} は質量と A のみに関係.

故に $|\eta_1|=\left|\int_{s_1}^{s}F_{\xi_1}ds\right|\geq\frac{1}{2c}|s-s_1|$. また c_{49} をきめるとき, $\frac{1}{4}c<|\xi|<2c$ for $|s-s_1|<c_{49}^{-1}<\frac{c}{10}$ も満足されている(自明ではない)から, $\xi>\frac{c}{4}$, よって

$$x=\xi\eta^2\geq\frac{1}{16c}(s-s_1)^2,\quad \frac{1}{U+1}=\frac{x}{Ux+x}\geq\frac{1}{32cm_1m_3}(s-s_1)^2.$$

故に
$$|t-t_1|=\left|\int_{s_1}^{s}\frac{ds}{U+1}\right|\geq\frac{1}{3}c_{57}^{-1}|s-s_1|^3,\quad c_{57}=32cm_1m_3,$$
$$\text{for}\ s_1-c_{56}^{-1}\leq s\leq s_1+c_{56}^{-1}.$$

このことから, real t 軸上で, 時刻 t_1 の前後 $\frac{1}{3}c_{57}^{-1}c_{56}^{-3}$ 時間内では $x=0$ となり得ない。よって $K=\frac{1}{3}c_{57}^{-1}c_{56}^{-3}$. [終]

§5 Siegel の予想

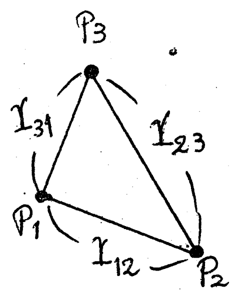
2体 P_1, P_3 が衝突するとき，新しい座標 ξ_k, η_k と s とを導入すれば，衝突の s-時刻 s_1 の近傍で ξ_k, η_k は $s-s_1$ の収束べキ級数で表現される。このとき p.16 で説明したように

$$(5.1)\quad \xi(s_1)=2(m_1m_3)^2/(m_1+m_3),\quad \eta_1(s_1)=\eta_2(s_1)=\eta_3(s_1)=0.$$

ここで $\xi=(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^{\frac{1}{2}}$. 条件(5.1)のみを満足する12個の real 初期値 $\xi_k(s_1), \eta_k(s_1)$, $k=1,\dots,6$ を与える. Hamiltonian functio F は これらの値で 0 となる. $\xi_k'=F_{\eta_k}, \eta_k'=-F_{\xi_k}$ $(k=1,\dots,6)$ の解に対して恒等的に 0. もとの変数 $q_k, \dot{q}_k$ $(k=1,\dots,9)$ にもどれば対応する解は 衝突の軌道となる. このときのエネルギー定数は h で，F のなかに linear にはいっている. よって12の初期値とパラメーター h とは4個の解析的条件(5.1)をみたす，衝突軌道はもと9個のパラメーターを含む. 故に10個の独立なパラメーターを含む. 解はこれらのパラメーターの解析関数となる。重心は0にあるという条件を除けば，あと6個パラメーターがふえる。よって衝突の軌道は，$(q_k, \dot{q}_k)$ $k=1,\dots,9$ から成る18次元空間内の16次元の解析多様体をつくる. もう二組の衝突の場合があるから，全部で三つのそのような多様体がある。これら三つの多様体の in the large における構造は？ Siegel の書物には，これらは18次元空間内で dense な集合をつくることが想像される，と書かれている. 果して？ Lebesgue 測度が 0 であることは知られている.

§6 3体衝突における Sundman の結果

時刻 t_1 において衝突が起るものとする. t の代りに t_1-t をとれば, 衝突は $t=0$ において起ることになる. 3体同時衝突が起るときは, 3体は或る固定された平面内になければならないから, その平面を $z=0$ にとる.

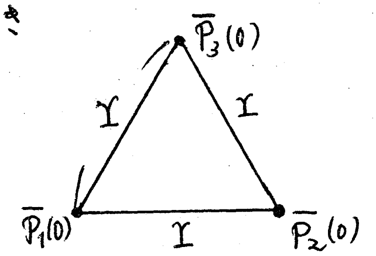


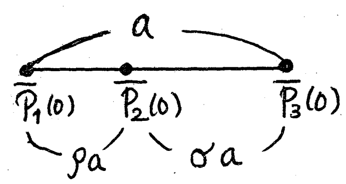
$$\bar{q} \equiv q\,t^{-\frac{2}{3}}, \quad \bar{p} = p\,t^{-\frac{2}{3}}$$

$$\bar{r}_{kl} \equiv r_{kl}\,t^{-\frac{2}{3}}$$

とおく. Sundman は次の結果を得た.

● $t \to 0$ のとき, $\bar{r}_{kl}$ は有限確定値に近づき, 座標が q の代りに $\bar{q}$ であるものを $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ とおけば $t \to 0$ のとき





$\Delta \bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$ は極限において正三角形になるか直線になるかのどちらかである. このとき

$$r \equiv \lim \bar{r}_{kl} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}(m_1+m_2+m_3)}$$

$$\frac{2}{9}a^3 = m_1 + m_2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\sigma^2}\right) + m_3\,,$$

$$\frac{2}{9}\sigma a^3 = m_1\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right) + m_2\frac{1}{\sigma^2} + m_3\frac{1}{\sigma^3} \qquad (\rho+\sigma=1).$$

がなりたつ。 a を消去すれば

$$m_1\sigma^2(\rho^3-1)+m_2(\rho^3-\sigma^3)+m_3\rho^2(1-\sigma^3)=0.$$

この方程式は $\rho<1$ なるただ一つの正根をもつ。 したがって 長さ a が定まる。

計算は極めて初等的であるが，ながくなるから証明は省略する。

さて 3体問題の特殊解は，任意質量に対しては，Lagrange による正三角形解と Euler による直線平衡解 の2種類だけであることはよく知られている！

3体衝突のときは 解は接続不可能であることが Siegel によって証明されている。確定特異点型の方程式に変換したとき，いわゆる固有値が irrational (or complex) になるか，rational になれば必ず対数項があらわれるという事実から，衝突時刻をこえては接続できないことが結論される。

以上が，Siegel の天体力学の衝突にかんする部分の紹介である。